การแก้สมการพหุนามกำลังสอง

ฟังก์ชันพหุนาม (polynomials)
คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

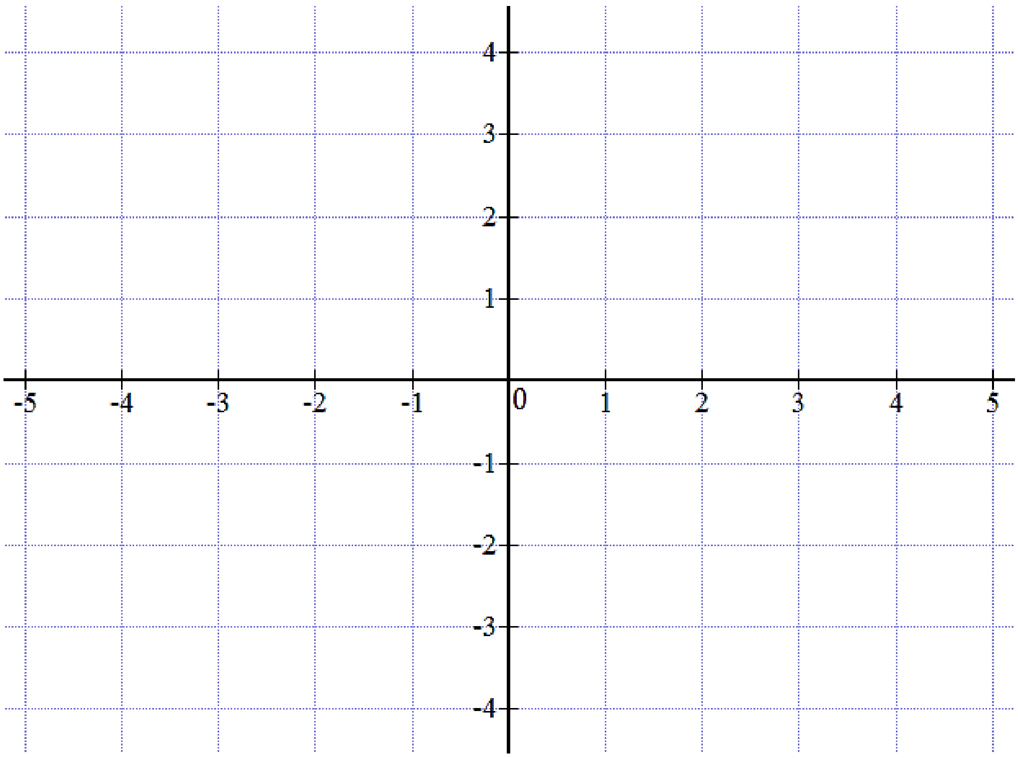
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a_n \neq 0$ จะเรียกพหุนามนี้ว่า พหุนามดีกรี n
ข้อสังเกต ถ้า $n = 1$ แล้ว ฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = a_1 x + a_0$ ก็คือฟังก์ชันเชิงเส้นนั่นเอง

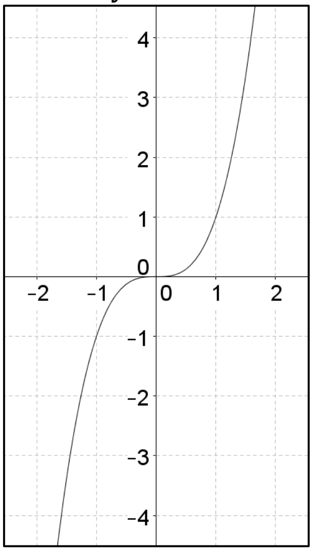
ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันพหุนาม

$$y = x^2, \qquad y = x^4, \qquad y = -x^2, \qquad y = -x^4$$

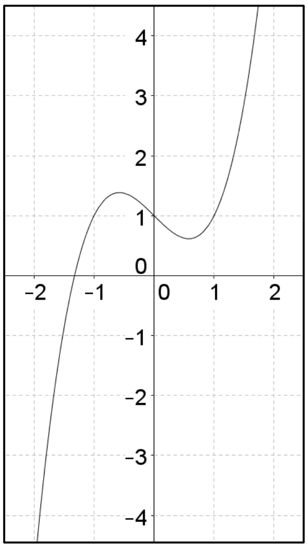


ตัวอย่างฟังก์ชันพหุนามอื่นๆ

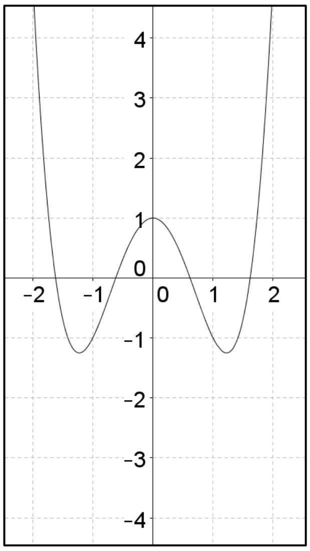
$y = x^3$



$y = x^3 - x + 1$



$y = x^4 - 3x^2 + 1$



พหุนามดีกรีสองหรือพหุนามกำลังสอง (**Quadratic equations**) คือพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$

ตัวอย่าง ฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$f(0) =$

$f(1) =$

$f(-1) =$

สำหรับพหุนาม $f(x)$ เราเรียกค่าของ c ซึ่งทำให้พหุนาม $f(c) = 0$ ว่า**ราก**หรือ**ผลเฉลย**ของสมการพหุนาม

ตัวอย่าง ฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = x^2 + 2x + 1$ มีรากคือ -1

วิธีหารากของสมการพหุนามกำลังสอง

แบบที่ 1 ax^2

ผลเฉลยของสมการพหุนาม $ax^2 = 0$ คือ 0

ตัวอย่าง รากของสมการพหุนาม $3x^2 = 0$ คือ

แบบที่ 2 $ax^2 + c$

ผลเฉลยของสมการพหุนาม $ax^2 + c = 0$ คือ $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ และ $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ เมื่อ $-\frac{c}{a} \geq 0$

ตัวอย่าง จงหาราก(ผลเฉลย) ของสมการพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 - 1 = 0$

2. $x^2 - 3 = 0$

3. $4x^2 - 1 = 0$

แบบที่ 3 $ax^2 + bx$

เราจะใช้การแยกตัวประกอบในการหาคำตอบของสมการพหุนาม

ตัวอย่าง จงหาราก(ผลเฉลย) ของสมการพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 + x = 0$

2. $x^2 + 3x = 0$

3. $2x^2 - x = 0$

4. $-5x^2 + 3x = 0$

5. $x^2 - \frac{x}{2} = 0$

แบบที่ 4 $ax^2 + bx + c$

เราจะใช้การแยกตัวประกอบในการหาคำตอบของสมการพหุนาม

ตัวอย่าง จงหาราก(ผลเฉลย) ของสมการพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 + 2x + 1 = 0$

2. $x^2 + 7x + 10 = 0$

3. $x^2 + 8x + 15 = 0$

4. $x^2 + 9x + 18 = 0$

5. $x^2 + 23x + 132 = 0$

6. $x^2 + 10x + 24 = 0$

7. $x^2 - 5x + 6 = 0$

8. $x^2 - 12x + 35 = 0$

9. $x^2 - 12x + 27 = 0$

10. $x^2 - 3x - 4 = 0$

11. $x^2 - 3x - 28 = 0$

12. $x^2 + 5x - 14 = 0$

13. $x^2 - 2x - 3 = 0$

14. $x^2 + 3x - 28 = 0$

15. $x^2 - 3x - 10 = 0$

16. $7x^2 - 31x - 20 = 0$

17. $7x^2 - 45x - 28 = 0$

18. $5x^2 - x - 18 = 0$

19. $2x^2 + 17x + 21 = 0$

เราอาจใช้สูตรสำหรับหารากของสมการพหุนามกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ ได้โดยตรงคือ

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

ตัวอย่าง จงหาราก(ผลเฉลย) ของสมการพหุนามกำลังสองต่อไปนี้โดยวิธีใช้สูตร

1. $x^2 + 2x + 1 = 0$

2. $x^2 + 7x + 10 = 0$

3. $x^2 + 8x + 15 = 0$

4. $x^2 + 9x + 18 = 0$

5. $x^2 + 23x + 132 = 0$

6. $x^2 + 10x + 24 = 0$

7. $x^2 - 5x + 6 = 0$

8. $x^2 - 12x + 35 = 0$

9. $x^2 - 12x + 27 = 0$

10. $x^2 - 3x - 4 = 0$

11. $x^2 - 3x - 28 = 0$

12. $x^2 + 5x - 14 = 0$

13. $x^2 - 2x - 3 = 0$

14. $x^2 + 3x - 28 = 0$

15. $x^2 - 3x - 10 = 0$

16. $7x^2 - 31x - 20 = 0$

17. $7x^2 - 45x - 28 = 0$

18. $5x^2 - x - 18 = 0$

19. $2x^2 + 17x + 21 = 0$

แบบฝึกหัด

จงหารากผลเฉลยของสมการพหุนามต่อไปนี้

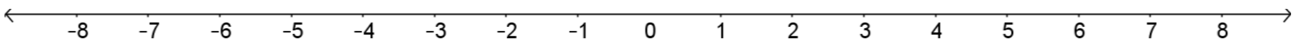
1. $9x^2 - 16 = 0$
2. $1 - 81x^2 = 0$
3. $x^2 - 9 = 0$
4. $50 - 4x^2 = 0$
5. $36 - 3x^2 = 0$
6. $x^2 + 6x + 5 = 0$
7. $3x^2 + 13x - 30 = 0$
8. $-x^2 + 9x + 12 = 0$
9. $4x^2 - 8x - 4 = 0$
10. $-x^2 - 6x + 4 = 0$

ความสัมพันธ์และฟังก์ชันเบื้องต้น

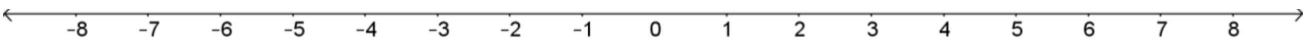
เซต (sets) หมายถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆที่แตกต่างกัน เราเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า **สมาชิกของเซต**
ในทางคณิตศาสตร์เราใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่เขียนแทนเซต และตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทนสมาชิกของเซต

ตัวอย่าง

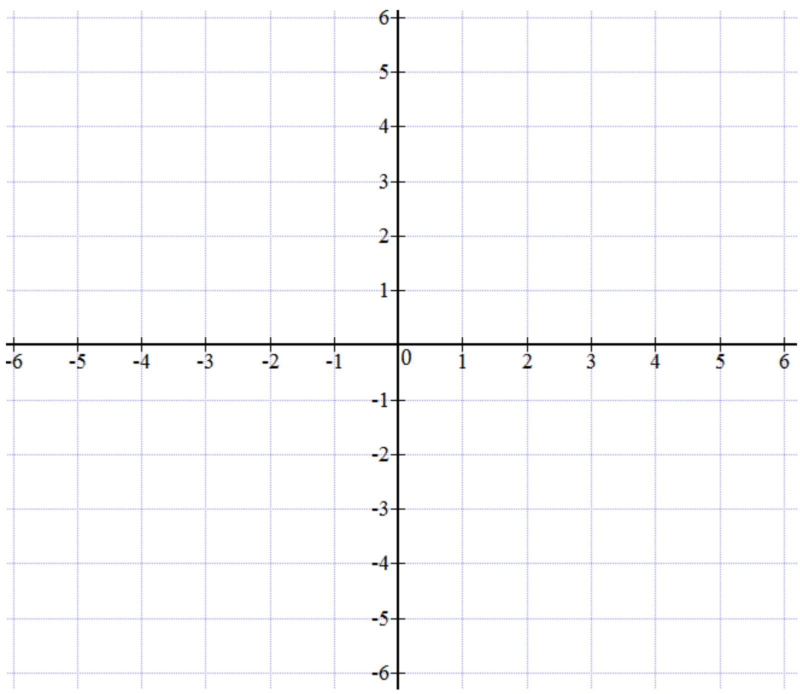
1. เซตของนักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป (MAT60-100) ในเทอมที่ 2 ปีการศึกษา 2560
   คำถาม นักเรียนเป็นสมาชิกของเซตๆนี้หรือไม่
2. เซตของแม่สีแสงสว่าง ซึ่งมีสมาชิกคือ สีแดง สีน้ำเงิน สีเขียว เราอาจเขียนแทนเซตนี้แบบแจกแจงสมาชิกโดยเขียนสมาชิกทั้งหมดของเซตในวงเล็บได้ดังนี้ {สีแดง, สีน้ำเงิน, สีเขียว}
3. เซตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 5 เราสามารถเขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
4. เซตของจำนวนเต็ม ในทางคณิตศาสตร์เราเขียนแทนเซตของจำนวนเต็มด้วย Z หรือ $\mathbb{Z}$
   เพราะฉะนั้น $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
5. เซตของจำนวนจริง ในทางคณิตศาสตร์เราเขียนแทนของจำนวนจริงด้วย R หรือ $\mathbb{R}$
   เราอาจแสดงเซตของจำนวนจริงด้วยเส้นจำนวนดังรูปด้านล่าง



6. เซตของจำนวนจริงซึ่งมีค่ามากกว่า -3 แต่น้อยกว่า 2 เราเขียนแสดงเซตนี้โดยใช้สัญลักษณ์ $(-3, 2)$ อ่านว่า "ช่วงเปิด -3 ถึง 2" และเขียนแสดงเซตนี้บนเส้นจำนวนได้ดังรูปด้านล่าง



7. เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง เราเขียนแทนเซตนี้ด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{R}^2$
   เราอาจแสดงเซต $\mathbb{R}^2$ ดังรูปด้านล่าง



ฟังก์ชัน (functions) f จากเซต D ไปเซต E คือกฎที่จับคู่แต่ละสมาชิก x ใน D กับสมาชิกเฉพาะ $f(x)$ ใน E เราเรียกเซต D ว่า**โดเมน**ของ f และเรียกเซตซึ่งมีสมาชิกประกอบด้วยค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $f(x)$ ว่า **เรนจ์**ของ f เราเขียนสัญลักษณ์แทนข้อความ “ f เป็นฟังก์ชันจากเซต D ไปเซต E” ด้วย $f: D \to E$
กราฟของฟังก์ชันคือเซตของคู่อันดับ $\{ (x, f(x)) \mid x \in D\}$

การเขียนแสดงฟังก์ชัน เราสามารถเขียนแสดงฟังก์ชันๆหนึ่งได้ 4 วิธีดังนี้

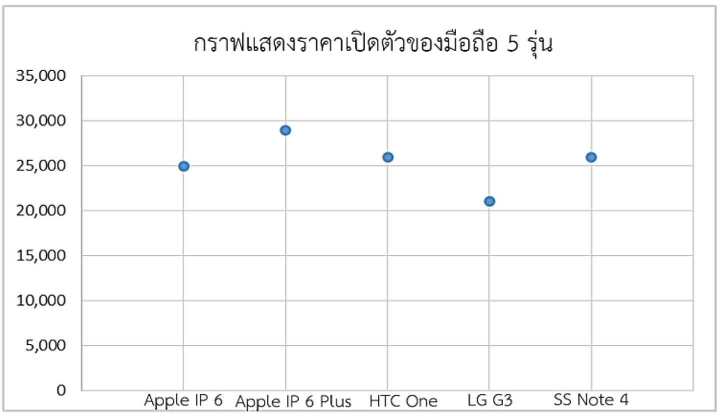
2. การเขียนอธิบายเป็นคำพูด
3. การเขียนแสดงค่าโดยใช้ตาราง
4. การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้กราฟ
5. การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้สูตร

ตัวอย่าง

1. การเขียนอธิบายเป็นคำพูด
(ที่มา http://www.siamphone.com) ฟังก์ชันแสดงราคาเปิดตัวของมือถือ 5 รุ่น ดังนี้ Apple iPhone 6, Apple iPhone 6 Plus, HTC One (M8), LG G3, Samsung Galaxy Note 4
การเขียนแสดงค่าโดยใช้ตาราง

ยี่ห้อและรุ่นของมือถือ	ราคาเปิดตัว(บาท)
Apple iPhone 6	24,900
Apple iPhone 6 Plus	28,900
HTC One (M8)	25,900
LGG 3	20,990
Samsung Galaxy Note 4	25,900

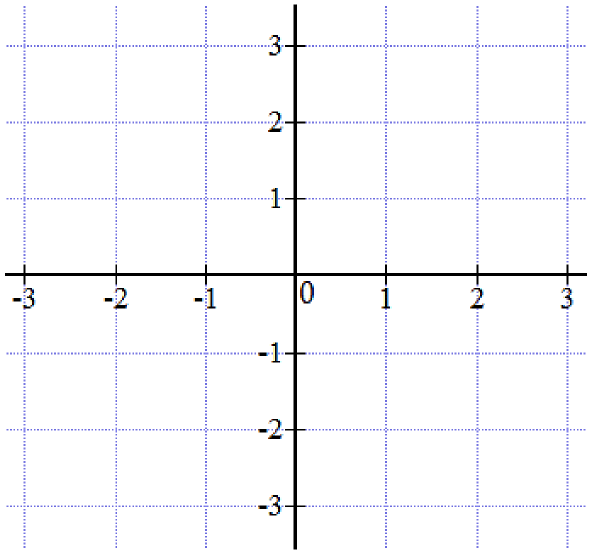
การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้กราฟ



2. การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้สูตร $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x$

$f(-2) =$ $f(-1) =$ $f(0) =$ $f(1) =$ $f(2) =$

การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้กราฟ

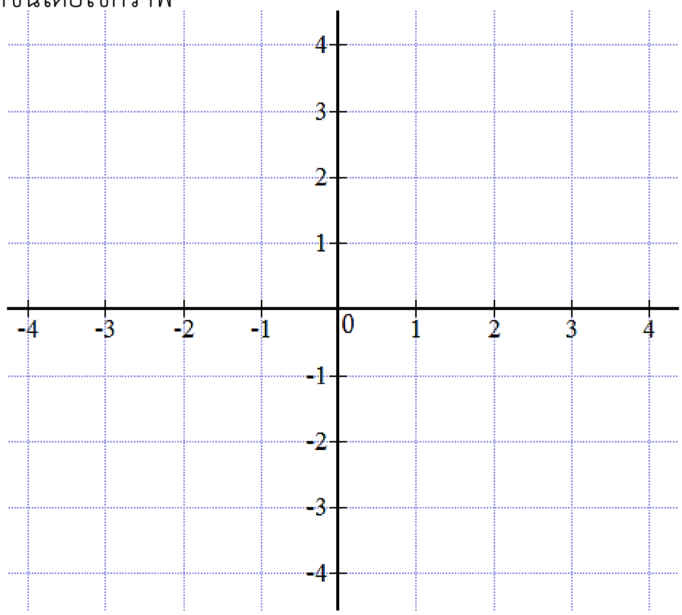


โดเมนของ f คือ เรนจ์ของ f คือ

3. การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้สูตร $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = 2x$

$f(-2) =$ $f(-1) =$ $f(0) =$ $f(1) =$ $f(2) =$

การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้กราฟ

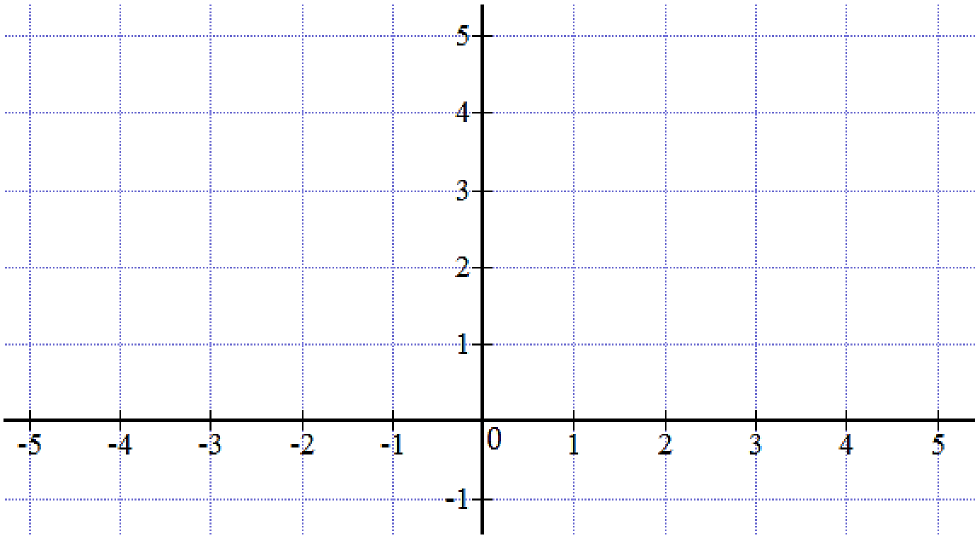


โดเมนของ f คือ เรนจ์ของ f คือ

4. การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้สูตร $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x^2$

$f(-2) =$ $f(-1) =$ $f(0) =$ $f(1) =$ $f(2) =$

การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้กราฟ

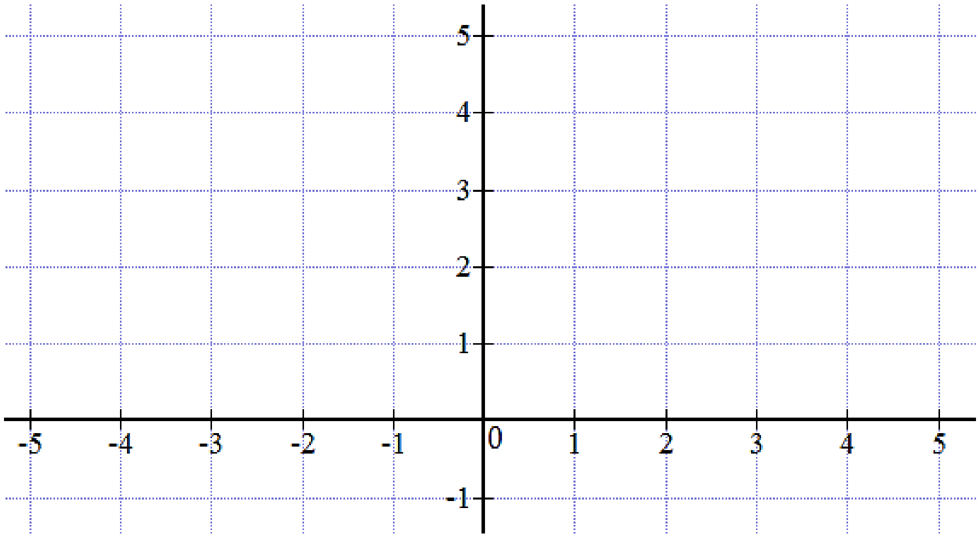


โดเมนของ f คือ เรนจ์ของ f คือ

5. การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้สูตร $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = 2^x$

$f(-2) =$ $f(-1) =$ $f(0) =$ $f(1) =$ $f(2) =$

การเขียนแสดงฟังก์ชันโดยใช้กราฟ

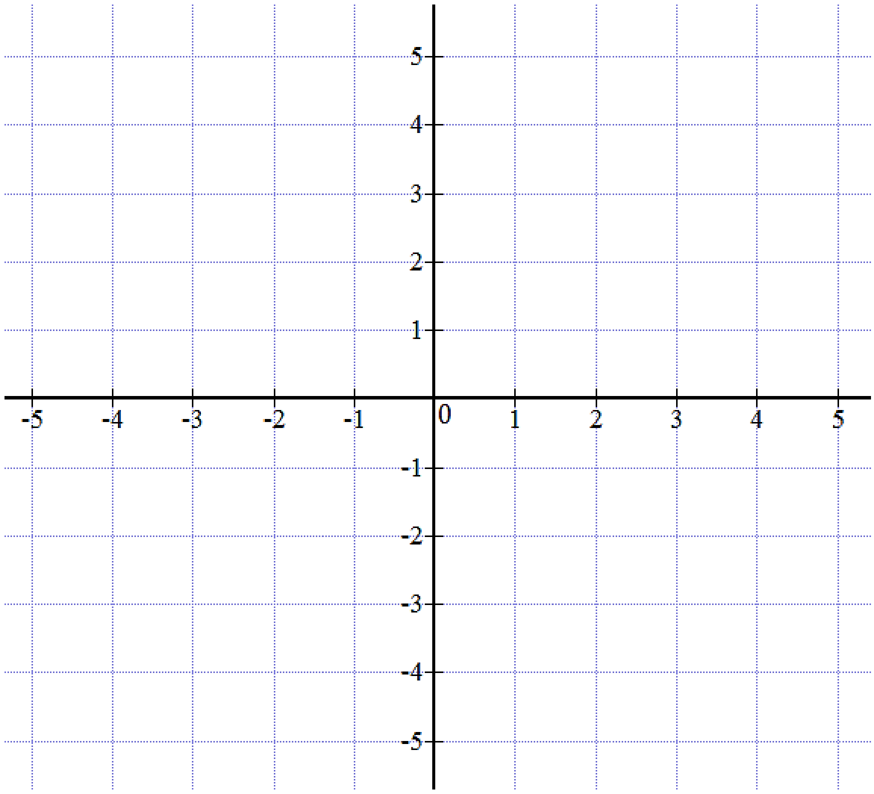


โดเมนของ f คือ เรนจ์ของ f คือ

ข้อตกลง ในวิชานี้ฟังก์ชันที่เราสนใจคือฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ (หรือจากเซตย่อยที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นไปได้ของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$) ดังนั้นเมื่อเรากำหนดฟังก์ชันโดยใช้สูตร เราจะละข้อความ "$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$" ไว้ในฐานที่เข้าใจ
เราอาจนิยามฟังก์ชันเป็นส่วนๆได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

6. ให้ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$

เราสามารถเขียนกราฟแสดงฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

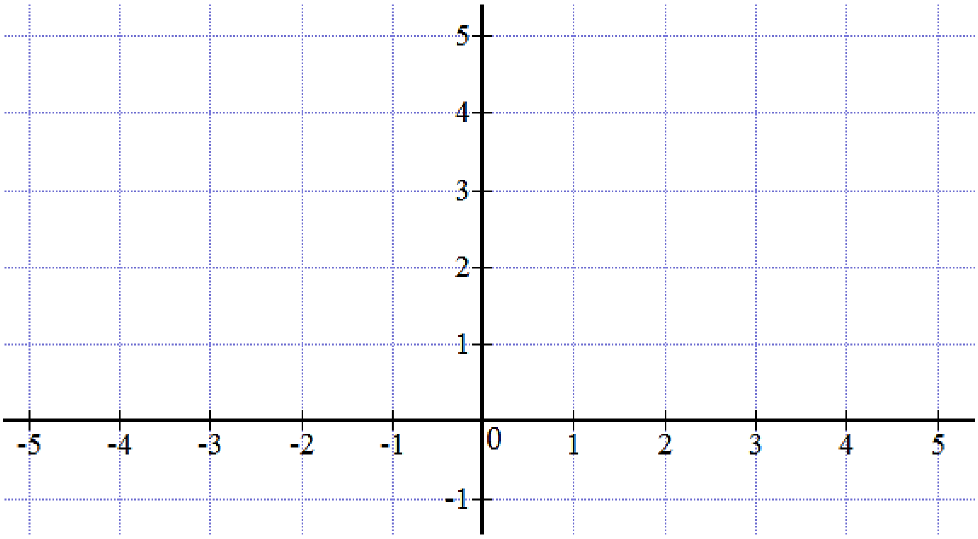


โดเมนของ f คือ เรนจ์ของ f คือ

7. ให้ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$

เราทราบว่า $|x| = \begin{cases} -x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$

เราสามารถเขียนกราฟแสดงฟังก์ชัน f ได้ดังนี้



โดเมนของ f คือ เรนจ์ของ f คือ

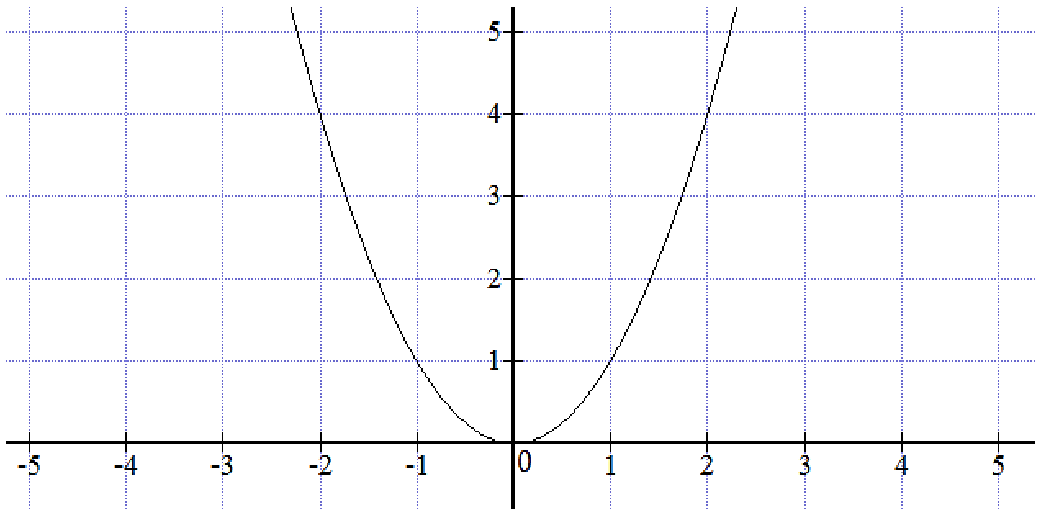
ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing and Decreasing Functions)

ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**บนช่วง I ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ ในช่วง I

ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันลด**บนช่วง I ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ ในช่วง I

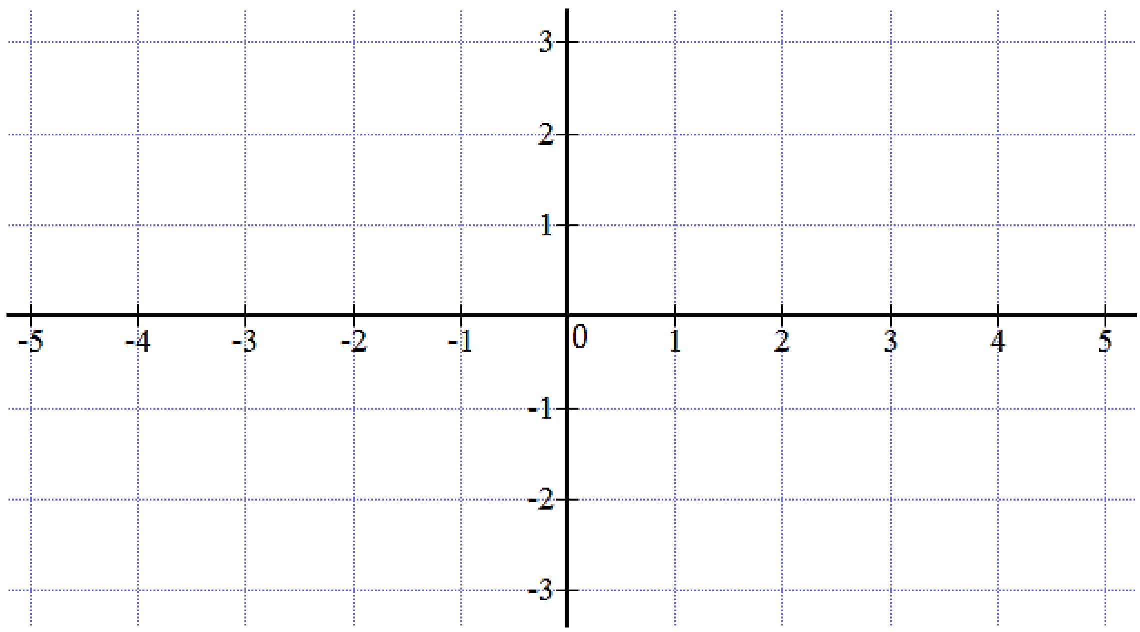
ตัวอย่าง

1. $f(x) = x^2$



f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งมีช่วง 2 ช่วง ซึ่งทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงนั้น และมีช่วง 2 ช่วง ซึ่งทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงนี้ พร้อมทั้งระบุช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและลดด้วย



กิจกรรม นักศึกษาจับกลุ่มสองถึงสามคนเพื่อทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. นำโทรศัพท์มือถือของสมาชิกในกลุ่มมาเปิดดูกราฟพลังงานแบตเตอร์รี่ที่เหลืออยู่ หรือปริมาณข้อมูลที่ถูกใช้ไป (data usage) ในช่วงเวลาต่างๆ

2. วาดกราฟลงในตารางด้านล่าง

3. กราฟนี้เป็นกราฟของฟังก์ชันอะไร

   แกน X ของกราฟแสดงถึงอะไร

   แกน Y ของกราฟแสดงถึงอะไร

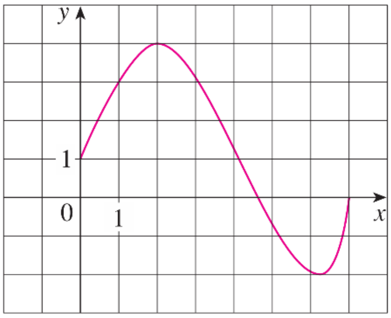
4. ฟังก์ชันที่นักศึกษาเลือกมาเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วงใด

5. ช่วงใดของกราฟที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว นักศึกษาคิดว่าเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น

NOTE

แบบฝึกหัด

1. กราฟของฟังก์ชัน f เป็นดังแสดงด้านล่าง



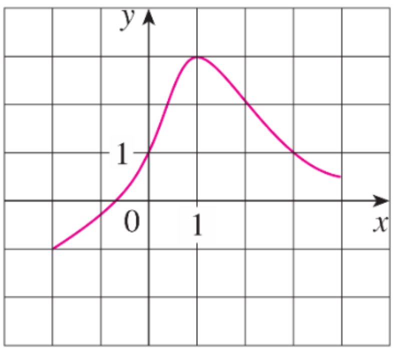
(a) จงประมาณค่าของ $f(1)$ และ $f(5)$

(b) จงบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f

2. $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ และ $g(u) = u + \sqrt{2-u}$ แล้วเราสรุปว่า $f = g$ ได้หรือไม่

3. ถ้า $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ และ $g(x) = x$ แล้วเราสรุปว่า $f = g$ ได้หรือไม่

4. จากกราฟของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้จงตอบคำถามต่อไปนี้



(a) $f(1) =$ $\qquad$ $f(-1) =$

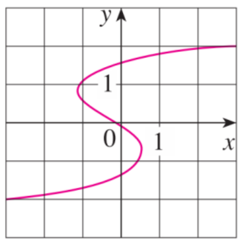
(b) x มีค่าเท่าใด ซึ่งทำให้ $f(x) = 1$

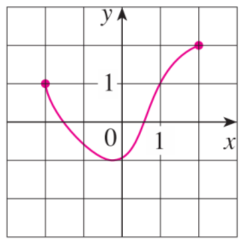
(c) จงประมาณค่า x ซึ่งทำให้ $f(x) = 0$

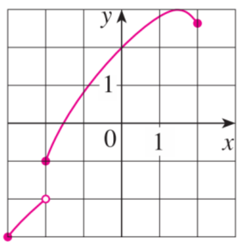
(d) จงบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f

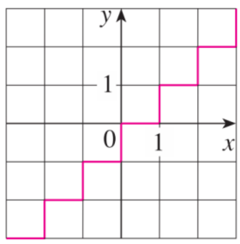
(e) บนช่วงใดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และบนช่วงใดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันลด

5. จงพิจารณาว่ากราฟในข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชัน พร้อมทั้งระบุโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชัน

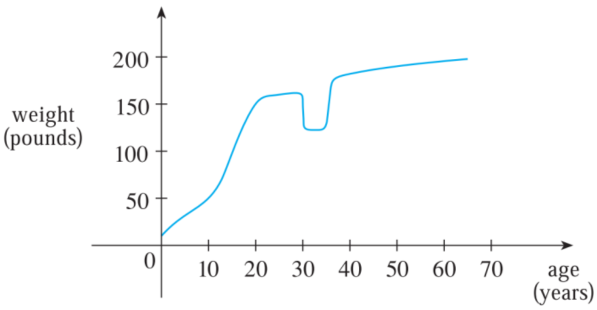




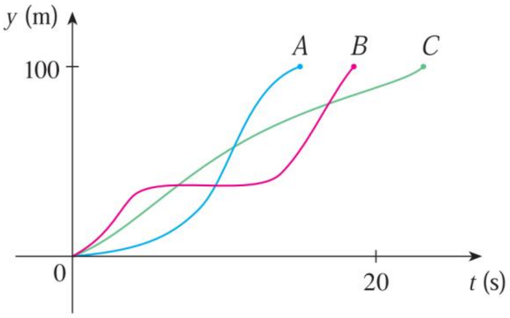




6. กราฟต่อไปนี้แสดงน้ำหนักของคนๆหนึ่งซึ่งเป็นฟังก์ชันของอายุ จงอธิบายเป็นคำพูดเกี่ยวกับน้ำหนักของคนๆนี้เมื่อเวลาผ่านไป และคาดเดาว่าเกิดอะไรขึ้นกับผู้ชายคนนี้เมื่อเขาอายุ 30 ปี



7. นักวิ่งสามคนทำการแข่งขันวิ่ง 100 เมตร กราฟต่อไปนี้แสดงระยะทางที่นักวิ่งๆได้เป็นฟังก์ชันของเวลา จงอธิบายเป็นคำพูดเกี่ยวกับเหตุการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นระหว่างการแข่งขันนี้ รวมทั้งระบุว่านักวิ่งคนใดชนะการแข่งขัน



8. จงเติมค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ลงในตารางที่กำหนดให้พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

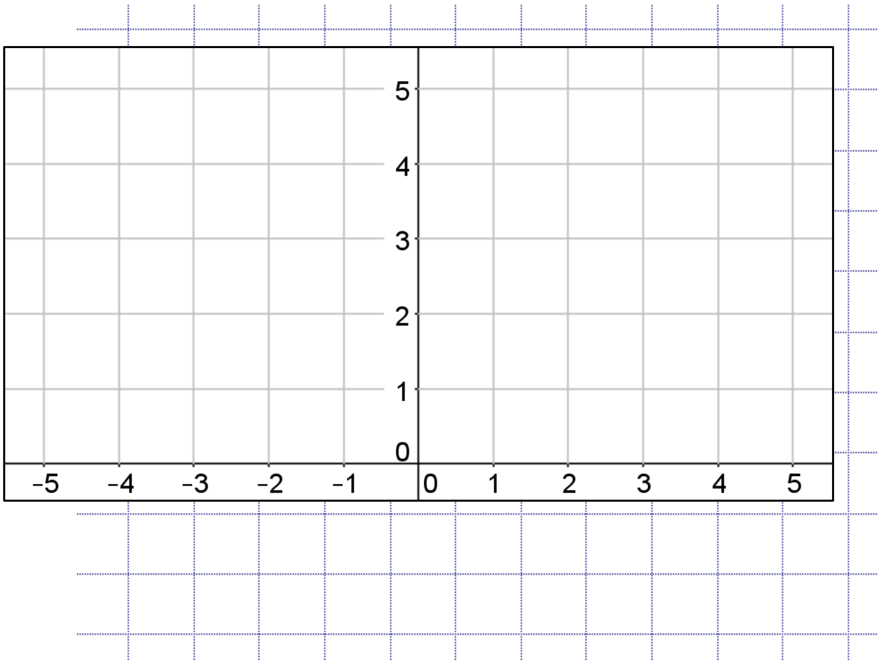
(a) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

x	$f(x)$
-3	
-1	
0	
1	
3	

กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นกราฟ ซึ่งมีความชันเท่ากับ และตัดแกน y ที่

(b) $g(x) = x^2 + 1$

x	$g(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	



กราฟของฟังก์ชัน $g(x)$ เป็นกราฟ ซึ่งมีจุดยอดที่จุด

(c) $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$

9. จงยกตัวอย่างฟังก์ชันที่นักศึกษาพบในวิชาที่เรียนหรือในชีวิตประจำวันมาสองฟังก์ชัน อธิบายความหมายพร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear functions)

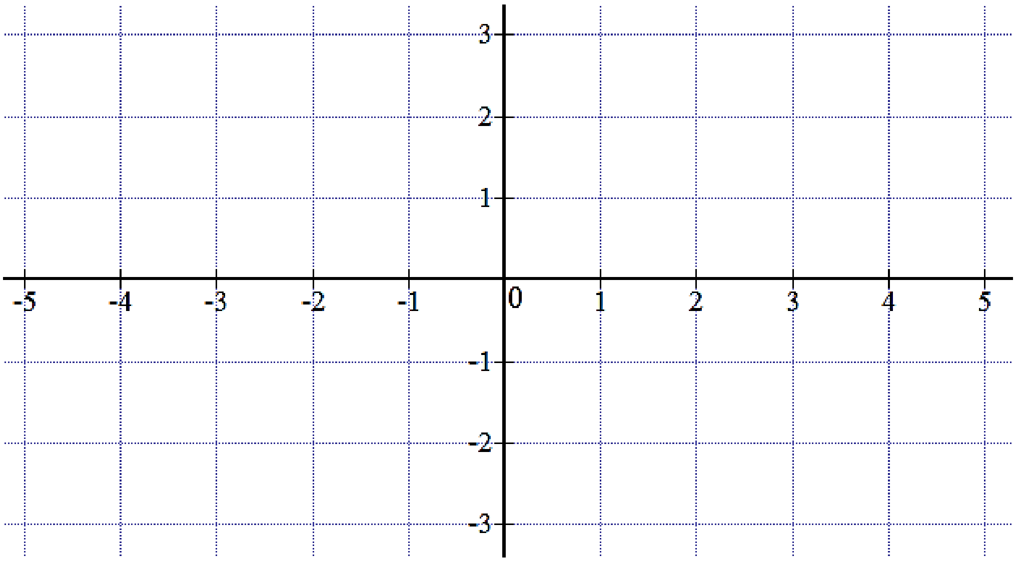
ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear functions) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$y = f(x) = mx + b$ เมื่อ m และ b เป็นจำนวนจริง

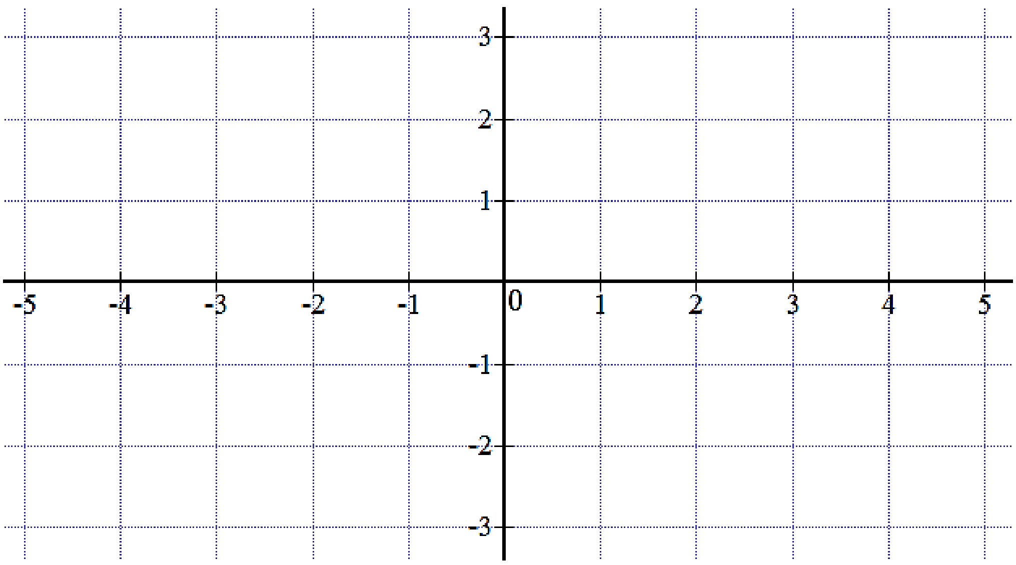
ถ้า $m = 0$ แล้ว เราเรียกฟังก์ชัน $f(x) = b$ ว่า**ฟังก์ชันค่าคงตัว**

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชันเชิงเส้น $y = f(x) = 1$ จงหาค่า $f(0), f(-1)$ และ $f(1)$ พร้อมทั้งวาดกราฟ

$f(0) =$ $f(-1) =$ $f(1) =$



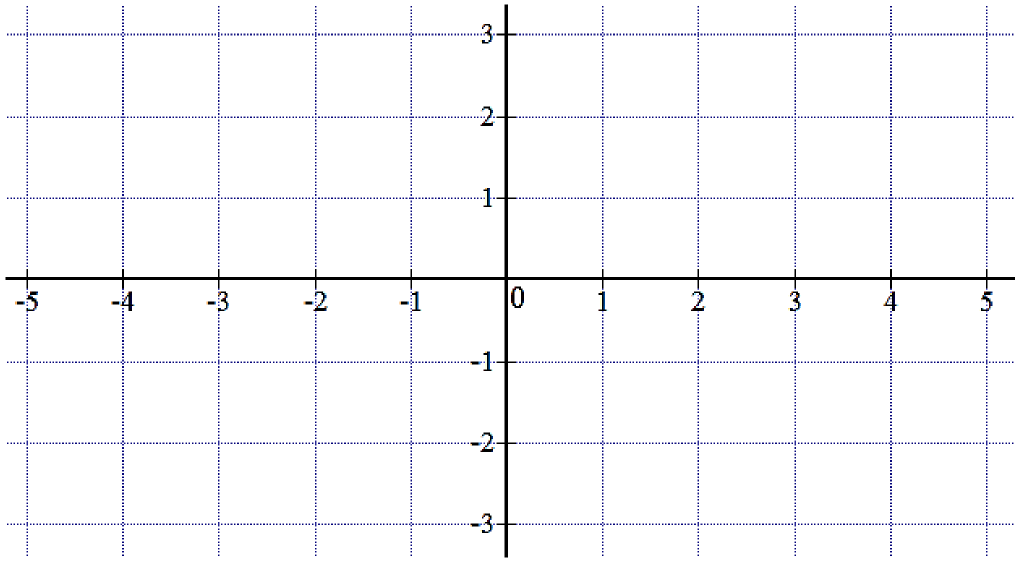
ตัวอย่าง จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = -1, y = -2, y = 1$ และ $y = 2$



ถ้า $m \neq 0$ แล้วตัวอย่างของกราฟ $f(x) = mx + b$ เป็นดังแสดงด้านล่าง

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = x$ จงหาค่าต่อไปนี้พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

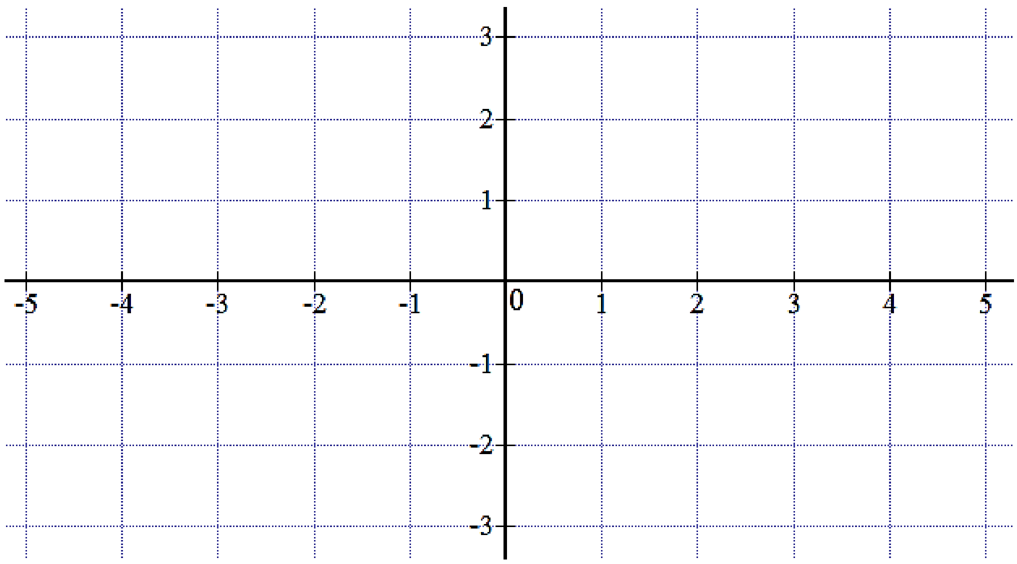
$f(-2) =$ $f(-1) =$ $f(0) =$ $f(1) =$ $f(2) =$



ข้อสังเกต

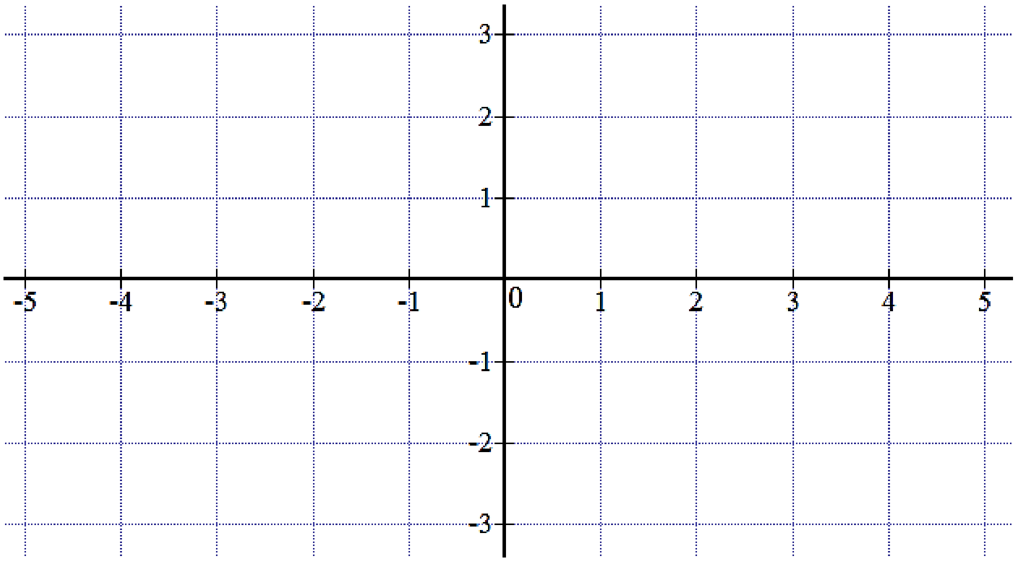
1. กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นเป็น**เส้นตรง** ซึ่งตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ และมี**ความชัน**เท่ากับ m
2. การวาดกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นทำได้โดยการหาจุดซึ่งอยู่บนกราฟสองจุดแล้วลากเส้นตรงผ่านสองจุดนั้น

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = x + 1$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันและตอบคำถามต่อไปนี้



กราฟของฟังก์ชันตัดแกน Y ที่จุด ตัดแกน X ที่จุด และมีความชันเท่ากับ

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = 2x - 1$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันและตอบคำถามต่อไปนี้



$f(0) =$

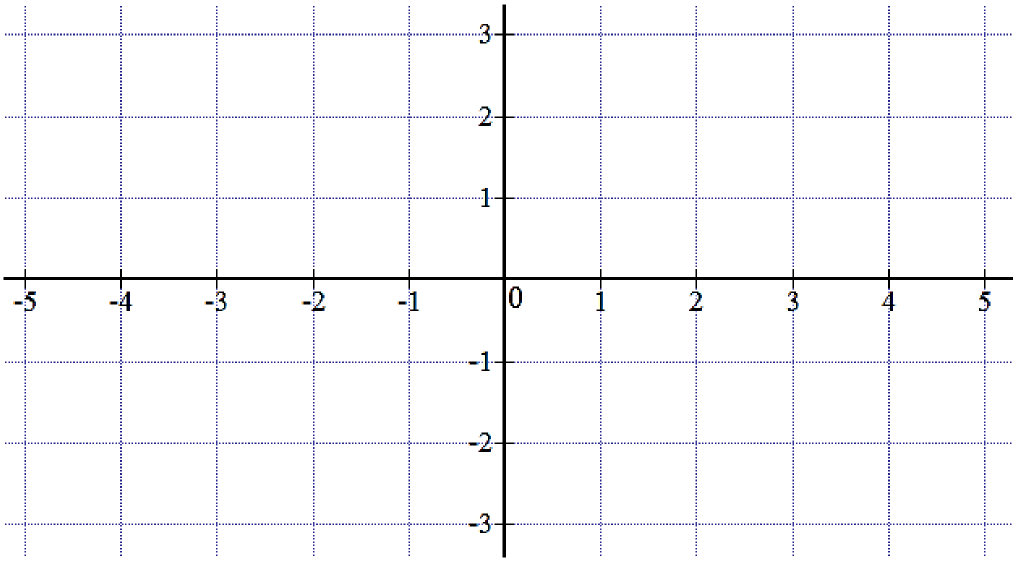
$f(2) =$

x มีค่าเท่าใดที่ทำให้ $f(x) = 0$

x มีค่าเท่าใดที่ทำให้ $f(x) = 11$

กราฟของฟังก์ชันตัดแกน Y ที่จุด ตัดแกน X ที่จุด และมีความชันเท่ากับ
ถ้า x เพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วยค่า y จะ
เมื่อ $x = 10$ แล้ว $y = 19$ ถ้า $x = 11$ แล้ว $y =$
ถ้า x ลดลงหนึ่งหน่วยค่า y จะ
เมื่อ $x = 10$ แล้ว $y = 19$ ถ้า $x = 9$ แล้ว $y =$

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = -3x + 2$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันและตอบคำถามต่อไปนี้



$f(0) =$

$f(1) =$

x มีค่าเท่าใดที่ทำให้ $f(x) = 0$

x มีค่าเท่าใดที่ทำให้ $f(x) = 3$

กราฟของฟังก์ชันตัดแกน Y ที่จุด ตัดแกน X ที่จุด และมีความชันเท่ากับ
ถ้า x เพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วยค่า y จะ
เมื่อ $x = 5$ แล้ว $y = -13$ ถ้า $x = 6$ แล้ว $y =$
ถ้า x ลดลงหนึ่งหน่วยค่า y จะ

เมื่อ $x = 5$ แล้ว $y = -13$ ถ้า $x = 4$ แล้ว $y =$

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่งผลิตถุงมือยางสองชนิดคือชนิด A และชนิด B ในแต่ละช่วงเวลาบริษัทสามารถผลิตสินค้าได้เพียงชนิดเดียวเท่านั้น

ให้ x แทนจำนวนหน่วยในการผลิตถุงมือยางชนิด A

y แทนจำนวนหน่วยในการผลิตถุงมือยางชนิด B

บริษัทมีเวลาผลิตสินค้าทั้งหมด 2,400 ชั่วโมง เวลาในการผลิตถุงมือยางชนิด A หนึ่งหน่วยเท่ากับ 2 ชั่วโมง เวลาในการผลิตถุงมือยางชนิด B หนึ่งหน่วยเท่ากับ 3 ชั่วโมง จงตอบคำถามต่อไปนี้

a) จงเขียนสมการแสดงชั่วโมงการทำงานรวมสำหรับการผลิตถุงมือยาง A เป็นจำนวน x หน่วย และผลิตถุงมือยาง B เป็นจำนวน y หน่วย ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2,400 ชั่วโมง

b) จงเขียนกราฟของสมการในข้อ a)

c) ถ้าเลือกผลิตถุงมือยางชนิด A อย่างเดียว จะได้ถุงมือยางชนิด A กี่หน่วย

d) ถ้าเลือกผลิตถุงมือยางชนิด B อย่างเดียว จะได้ถุงมือยางชนิด B กี่หน่วย

e) ถ้าต้องการผลิตถุงมือยางชนิด A จำนวน 150 หน่วย จะเหลือเวลาในการผลิตถุงมือยางชนิด B กี่ชั่วโมงและเวลาที่เหลือนี้จะผลิตถุงมือยาง B ได้กี่หน่วย

ตัวอย่าง จงยกตัวอย่างฟังก์ชันค่าคงตัวที่นักศึกษาเจอในชีวิตประจำวัน

ตัวอย่าง จงยกตัวอย่างฟังก์ชันเชิงเส้นที่ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัวที่นักศึกษาเจอในชีวิตประจำวัน

Note

แบบฝึกหัด

1. กำหนดฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันและตอบคำถามต่อไปนี้

$f(0) =$

$f(2) =$

x มีค่าเท่าใดที่ทำให้ $f(x) = 0$

x มีค่าเท่าใดที่ทำให้ $f(x) = 11$

กราฟของฟังก์ชันตัดแกน Y ที่จุด ตัดแกน X ที่จุด และมีความชันเท่ากับ
ถ้า x เพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วยค่า y จะ
ถ้า x ลดลงหนึ่งหน่วยค่า y จะ

2. ผู้ให้เช่าพื้นที่ขายของของตลาดนัดแห่งหนึ่งสังเกตว่า ถ้าเขาคิดค่าเช่าเป็นเงิน x (พันบาท) ต่อหนึ่งช่องขายของ จำนวนช่องขายของ y ที่จะถูกเช่าจะเป็นไปตามสมการ $y = 200 - 4x$

   (a) จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้

   (b) ความชันของกราฟนี้มีค่าเท่าใด กราฟนี้ตัดแกน Y เมื่อค่า x เป็นเท่าใดและจุดตัดแกน X แสดงถึงอะไร

3. ผู้จัดการของโรงงานผลิตเฟอร์นิเจอร์พบว่าต้นทุนในการผลิตเก้าอี้แบบหนึ่งจำนวน 100 ตัวต่อวัน เท่ากับ $66{,}000$ บาท และต้นทุนในการผลิตเก้าอี้นี้จำนวน 300 ตัวต่อวัน เท่ากับ $144{,}000$ บาท

   (a) จงเขียนสมการแสดงต้นทุนในการผลิตเก้าอี้เมื่อพิจารณาเป็นฟังก์ชันของจำนวนเก้าอี้ที่ต้องการผลิตต่อวัน โดยสมมติว่าเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

   (b) ความชันของกราฟมีค่าเท่าใด และแสดงถึงอะไร

   (c) กราฟตัดแกน Y ที่ใดและจุดตัดแกน Y หมายถึงอะไร

4. นักศึกษามีเงินอยู่ 6,000 บาท ต้องการซื้อที่อุดหูป้องกันเสียงดังและหน้ากากอนามัย โดยที่อุดหูป้องกันเสียงดังมีราคากล่องละ 300 บาท หน้ากากอนามัยราคากล่องละ 200 บาท

ให้ x แทนจำนวนกล่องของที่อุดหูป้องกันเสียงดังที่ซื้อมาขาย และ y แทนจำนวนกล่องของหน้ากากอนามัยที่ซื้อมาขาย จงตอบคำถามต่อไปนี้

(a) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y โดยพิจารณาเป็นสมการเชิงเส้น

(b) จงเขียนกราฟของสมการในข้อ (a)

ข้อสังเกต กราฟที่เราวาดนั้นเป็นกราฟของความสัมพันธ์ซึ่งได้จากข้อ (a) แต่ในความเป็นจริงแล้วความสัมพันธ์ของ x และ y อาจไม่เป็นดังกราฟ ดูข้อ (e)

(c) ถ้าซื้อที่อุดหูป้องกันเสียงดังเพียงอย่างเดียวจะได้ที่อุดหูป้องกันเสียงดังกี่กล่อง

(d) ถ้าซื้อหน้ากากอนามัยเพียงอย่างเดียวจะได้หน้ากากอนามัยกี่กล่อง

(e) ถ้าต้องการซื้อที่อุดหูป้องกันเสียงดัง 5 กล่อง จะซื้อหน้ากากอนามัยได้กี่กล่องและเหลือเงินเท่าใด

5. มูลค่าของเครื่องวัดคุณภาพน้ำ (V) ในทางบัญชีถือว่าจะลดลงเรื่อยๆใน**อัตราคงที่**เมื่อระยะเวลา (t) ผ่านไปหรือเกิดค่าเสื่อมราคา ถ้ามูลค่าของเครื่องวัดคุณภาพน้ำเครื่องหนึ่งเริ่มต้นที่ $18{,}000$ บาท เมื่อเวลาผ่านไป 1 ปี ราคาลดลงเหลือ $14{,}500$ บาท จงตอบคำถามต่อไปนี้

(a) จงเขียนสมการ**เส้นตรง**แสดงมูลค่าเครื่องวัดคุณภาพน้ำนี้พร้อมทั้งวาดกราฟ

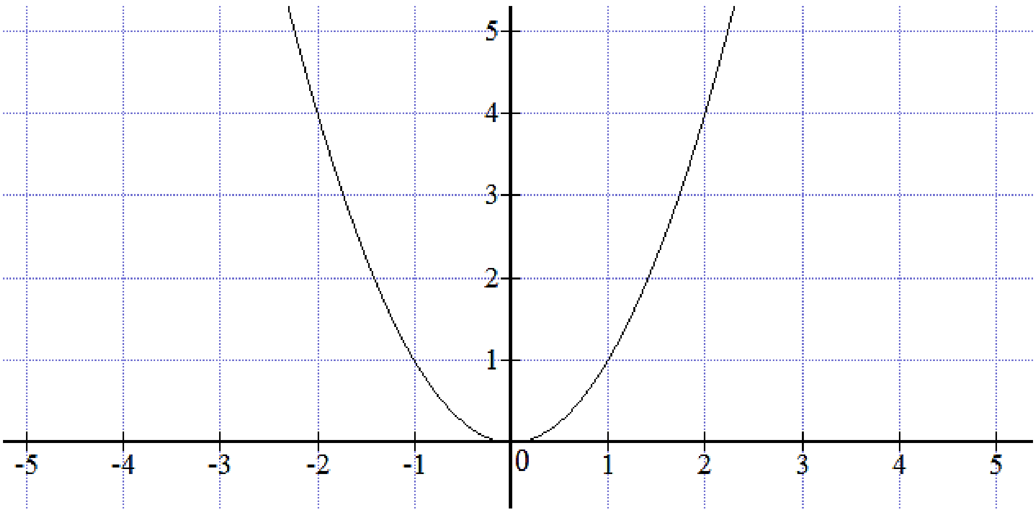
(b) ความหมายของความชันคืออะไร

(c) เมื่อเวลาผ่านไป 4 ปี เครื่องวัดคุณภาพน้ำจะมีมูลค่าเท่าใด

(d) ที่ระยะเวลากี่ปีเครื่องวัดคุณภาพน้ำนี้จะมีมูลค่าเป็นศูนย์

พาราโบลา(parabola)

ตัวอย่าง $y = x^2$



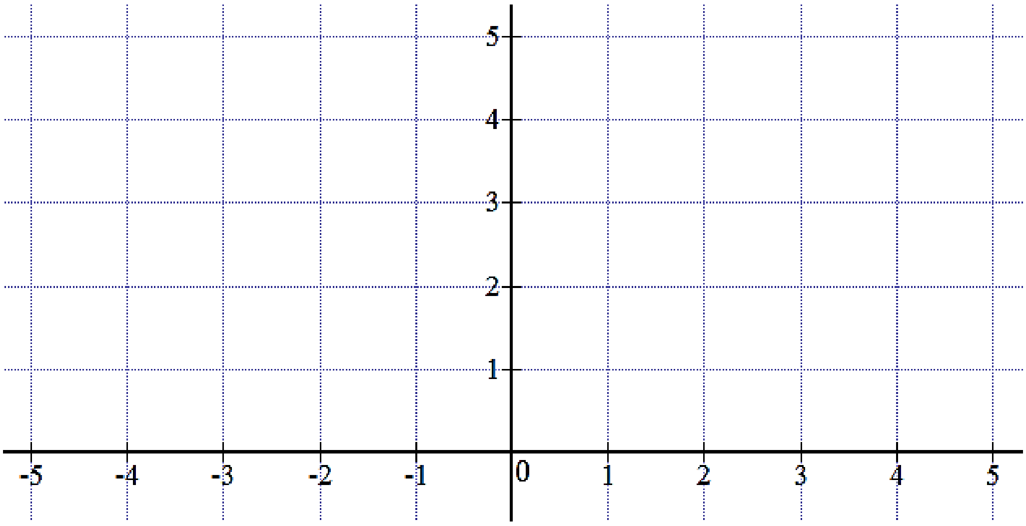
วิธีร่างกราฟพาราโบลาซึ่งมีสมการคือ $y = Ax^2 + Bx + C$

1. หาจุดยอดของพาราโบลาจากสูตรต่อไปนี้
   จุดยอด (h, k) ของพาราโบลาหาได้จาก $h = -\frac{B}{2A}$ และ $k = \frac{4AC-B^2}{4A}$
2. หาจุดตัดแกน Y $\big(0, y(0)\big)$
3. หาจุดตัดแกน X ถ้ามี
4. หาจุดบนพาราโบลานอกจากจุดยอดอีกสองจุดซึ่งอาจเป็นจุดในข้อ 2. และ 3. ก็ได้

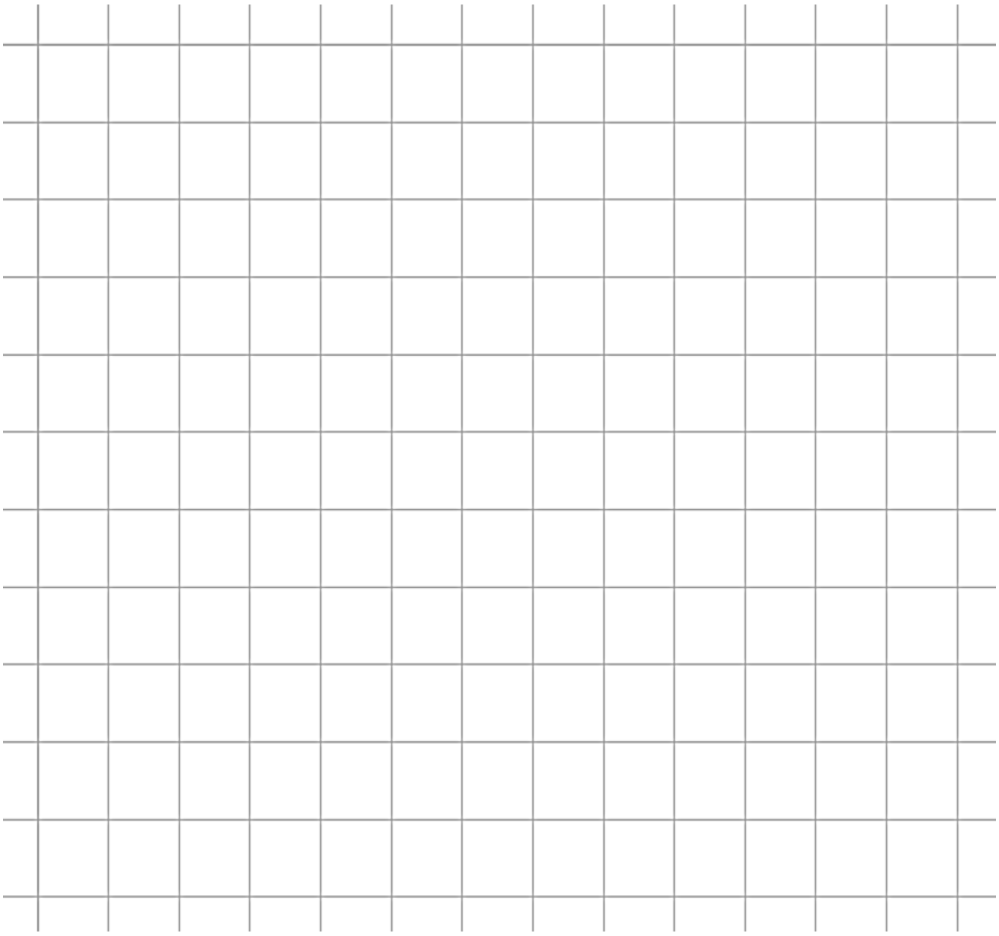
ในทำนองเดียวกันสำหรับกราฟพาราโบลาซึ่งมีสมการคือ $x = Ay^2 + By + C$

1. หาจุดยอดของพาราโบลาจากสูตรต่อไปนี้
   จุดยอด (h, k) ของพาราโบลาหาได้จาก $h = \frac{4AC-B^2}{4A}$และ $k = -\frac{B}{2A}$
2. หาจุดตัดแกน X $\big(0, x(0)\big)$
3. หาจุดตัดแกน Y ถ้ามี
4. หาจุดบนพาราโบลานอกจากจุดยอดอีกสองจุดซึ่งอาจเป็นจุดในข้อ 2. และ 3. ก็ได้

ตัวอย่าง จงร่างกราฟพาราโบลา $y = x^2 + 1$



ตัวอย่าง จงวาดกราฟพาราโบลา $y = 2x^2 + 12x + 10$



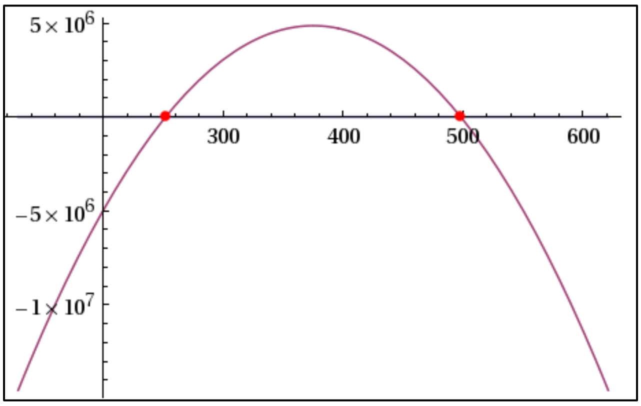
ตัวอย่าง จงวาดกราฟพาราโบลา $y = -x^2 + 4x - 5$

ตัวอย่าง โรงงานเครื่องวัดอุณหภูมิพบว่าจะขายสินค้าได้ x (พัน)หน่วย ถ้าตั้งราคาขาย $p = 32 - \frac{x}{8}$ (พัน)บาทต่อหน่วย จงเขียนสมการของรายรับสุทธิเมื่อพิจารณาเป็นฟังก์ชันของราคาขายต่อหน่วย พร้อมทั้งหารายรับสูงสุดและราคาขายต่อหน่วยซึ่งจะทำให้ได้รายรับสูงสุด

วิธีทำ

ตัวอย่าง โรงงานผลิตแผงพลังงานแสงอาทิตย์ได้ออกผลิตภัณฑ์รุ่นใหม่และทำการศึกษาสภาพตลาดคาดว่าอุปสงค์ในสินค้ารุ่นใหม่คือ $q = 100000 - 200p$ เมื่อ q แทนจำนวนสินค้าที่มีความต้องการต่อปีมีหน่วยเป็นแสนชิ้น และ p คือราคาสินค้ามีหน่วยเป็นบาท และฝ่ายการผลิตแจ้งต้นทุนการผลิตรวมคือ $C = 150000 + 100q + 0.003q^2$ จงเขียนสมการกำไรต่อปีของสินค้ารุ่นใหม่นี้เมื่อพิจารณาเป็นฟังก์ชันของราคาต่อหน่วย พร้อมทั้งหากำไรสูงสุดและราคาขายต่อหน่วยซึ่งจะทำให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ



Note

แบบฝึกหัด

1. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = 9x^2 - 1$

2. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = x^2 + 5x - 14$

3. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = -x^2 + x + 12$

การหาพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้ง

ขั้นตอนการแรงเงาพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้ง

1. วาดเส้นโค้งแต่ละเส้น
2. หาจุดตัดระหว่างเส้นโค้ง (ถ้ามี) โดยการแก้สมการพหุนาม
3. พิจารณาบริเวณที่แรเงาจากเงื่อนไขของโจทย์

ตัวอย่าง จงหาวาดกราฟ พร้อมหาจุดตัดและแรเงาพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = 2x$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาจุดตัดพร้อมทั้งแรเงาพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งต่อไปนี้

1. $y = x^2$ และ $y = 5$

<u>วิธีทำ</u>

2. $2 - y = x^2$ และ $y = x$

<u>วิธีทำ</u>

3. $2-x=y^2$ และ $y=x$

<u>วิธีทำ</u>

4. $y+x^2=3$ และ $4y+x^2=0$

<u>วิธีทำ</u>

5. $x+y^2=3$ และ $4x+y^2=0$

<u>วิธีทำ</u>

6. $y=x,\ y=-x+2,\ y=-x$ และ $x=2$

<u>วิธีทำ</u>

7. $y = x^2,\ y = -x+2,\ y = 1$ และ $y = 2$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงแรเงาอาณาบริเวณจากเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \le 1\}$

วิธีทำ

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > 2\}$

วิธีทำ

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 2\}$

วิธีทำ

4. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -3 < y \leq 0\}$

<u>วิธีทำ</u>

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x\}$

<u>วิธีทำ</u>

6. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y\geq x,\ -2\leq x\leq 3\}$

<u>วิธีทำ</u>

7. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y+2x\leq 2,\ 0\leq x\leq 2\}$

<u>วิธีทำ</u>

8. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 1-y\le x\le y-1\}$

<u>วิธีทำ</u>

9. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 1-y\le x\le y-1,\ -2\le y\le 4\}$

<u>วิธีทำ</u>

10. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R} \mid y-1 \leq x \leq 1-y\}$

วิธีทำ

11. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R} \mid y-1 \leq x \leq 1-y,\ -2 \leq y \leq 4\}$

วิธีทำ

12. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid -\sqrt{y}\le x\le 2-y,\ 0\le y\le 4\right\}$

วิธีทำ

13. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid -\sqrt{y}\le x\le 2-y,\ 1\le y\le 2\right\}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่งผลิตน้ำอัดลมชนิด M และชนิด N โดยที่ชนิด M แต่ละขวดใช้หัวเชื้อน้ำตาล 4 กรัม กับหัวเชื้อน้ำส้ม 1 กรัม ส่วนชนิด N แต่ละขวดใช้หัวเชื้อน้ำตาล 2 กรัม กับหัวเชื้อน้ำส้ม 3 กรัม ถ้าในแต่ละวันบริษัทมีหัวเชื้อน้ำตาลเพียง 20,000 กรัม และหัวเชื้อน้ำส้ม 9,000 กรัม เท่านั้น บริษัทจะได้กำไรจากการขายน้ำอัดลมชนิด M ขวดละ 0.50 บาท และชนิด N ขวดละ 0.75 บาท อยากทราบว่าทางบริษัทควรผลิตน้ำอัดลมชนิด M และชนิด N วันละกี่ขวดจึงจะได้กำไรมากที่สุดและเป็นเงินเท่าไร

วิธีทำ

วาดกราฟและหาจุดตัดของกราฟ

ตัวอย่าง ถ้าผู้ป่วยจำเป็นจะต้องรับประทานอาหารเสริมเพื่อให้ได้พลังงานไม่น้อยกว่า 1,250 แคลอรี่ และวิตามินซีไม่น้อยกว่า 700 หน่วยต่อวัน อยากทราบว่าผู้ป่วยควรจะรับประทานอาหารเสริมแต่ละชนิดกี่กรัม จึงจะได้พลังงานและวิตามินตามที่ต้องการแต่เสียเงินค่าอาหารเสริมน้อยที่สุด เมื่ออาหารเสริมชนิดแรก 1 กรัม ให้พลังงาน 20 แคลลอรี่ และวิตามินซี 10 หน่วย ชนิดที่สอง โดยอาหารเสริมชนิดแรกและชนิดที่สองราคากรัมละ 0.90 บาท และ 0.70 บาท ตามลำดับ

วิธีทำ

วาดกราฟและหาจุดตัดของกราฟ